04/05/17.

Έστω G ομάδα και $H \leq G$.

① $\forall x, y \in G$: $x \sim_H y \iff x^{-1} \cdot y \in H$. Τότε η '$\sim_H$' είναι σχ. ισοδ. επί του G. $[x]_H := xH = \{xh \mid h \in H\}$ και
$G/\sim_H = \{xH \subseteq G \mid x \in G\}$.

② $\forall x, y \in G$: $x \,{}_H\!\sim y \iff x \cdot y^{-1} \in H \Rightarrow {}_H\!\sim$ είναι σχ. ισοδ. επί του G.
${}_H[x] := Hx = \{hx \in G \mid h \in H\}$. και $G/{}_H\!\sim = \{Hy \subseteq G \mid y \in G\}$

Πρόβλημα: (1) Πότε $\sim_H \equiv \underset{H}{\sim}$;

(2) Πότε, ορίζοντας $\forall x,y \in G : xH \cdot yH = (x\cdot y)H$ το σύνολο $G/\sim_H$ αποκτά δομή ομάδας;

Π.χ.

(1) $G = S_3$.

(α) $H = \langle \mu_1 \rangle = \{i, \mu_1\}$ όπου $\mu_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

- $iH = H = \{i, \mu_1\}$
- $\mu_2 H = \{\mu_2 \cdot i, \mu_2 \cdot \mu_1\} = \{\mu_2, \rho_2\}$

  $\mu_2 \cdot \mu_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
- $\mu_3 H = \{\mu_3 \cdot i, \mu_3 \cdot \mu_1\} = \{\mu_3, \rho_1\}$

  $\mu_3 \cdot \mu_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = \rho_1$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow S_3/\sim_H = \{iH, \mu_2 H, \mu_3 H\}$

- $Hi = H = \{i, \mu_1\}$
- $H\mu_2 = \{i\mu_2, \mu_1 \cdot \mu_2\} = \{\mu_2, \rho_1\}$
- $H\mu_3 = \{i\mu_3, \mu_1\mu_3\} = \{\mu_3, \rho_2\}$

$\Rightarrow$

$\mu_1 \cdot \mu_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = \rho_1$

$\Rightarrow S_3/\underset{H}{\sim} = \{Hi, H\mu_2, H\mu_3\}$ με $\mu_2 H \neq H\mu_2$

(β) $H = \langle \rho_1 \rangle = \{i, \rho_1, \rho_2\}$

- $iH = H = \{i, \rho_1, \rho_2\}$
- $\mu_1 H = \{\mu_1 \cdot i, \mu_1 \cdot \rho_1, \mu_1 \rho_2\} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ διότι $iH, \mu_1 H$

θα αποτελούν διαμέριση του $S_3/\sim_H$ και άρα μπορώ να συμπληρώσω τη $\mu_1 H$ χωρίς υπολογισμούς αφού θέλω $iH \cup \mu_1 H = S_3$. Άρα $S_3/\sim_H = \{iH, \mu_1 H\}$.

Για την $\underset{H}{\sim}$:
- $Hi = H = \{i, \rho_1, \rho_2\}$
- $H\mu_1 = \{i \cdot \mu_1, \rho_1 \cdot \mu_1, \rho_2 \cdot \mu_1\} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$

Άρα βλέπω ότι $S_3 /_{\underset{H}{\sim}} = \{Hi, H\mu_1\}$ με $\mu_1 H = H\mu_1$

Π.χ.:
(2) $G = \mathbb{Z}$, $H = \langle n \rangle = n\mathbb{Z} = \{nk \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $n \geq 1$

[Αν $(G,+)$ προσθετική και $H \leq G \Rightarrow$ (1) $x \sim_H y \Leftrightarrow (-x+y) \in H$ και $[x]_H = \{x+h \in G \mid h \in H\}$ και $G/\sim_H = \{x+H \subseteq G \mid x \in G\}$]

$\forall x,y \in \mathbb{Z}: x \sim_H y \Leftrightarrow (-x+y) \in n\mathbb{N} \Leftrightarrow -x+y = nk,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n \mid -x+y \Leftrightarrow n \mid x-y \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod n)$
και όμοια $x \underset{H}{\sim} y \Leftrightarrow x-y = nk,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid x-y \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod n)$
$\Rightarrow \boxed{x \sim_H y \Leftrightarrow x \underset{H}{\sim} y}$ (αυτό συμβαίνει διότι H: αβελιανή)

$\mathbb{Z}/\sim_H = \{x+n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\} \overset{(*)}{=} \{[x]_n \subseteq \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_n, \ldots, [n-1]_n\}$

(*) Όμως $x + n\mathbb{Z} = \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = [x]_n$ $= \mathbb{Z}_n$.

Το $\mathbb{Z}_n$ είναι εφοδιασμένο με την "+" ως εξής:
$[x]_n + [y]_n = [x+y]_n$.

<u>Πρόταση</u>: Αν G: ομάδα και $H \leq G$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
1. Η πράξη $xH \cdot yH = (xy)H$ είναι καλά ορισμένη στο $G/\sim_H$.
2. $\forall x \in G, h \in H: x^{-1}hx \in H$
3. $\forall x \in G: x^{-1}Hx \subseteq H$, όπου $x^{-1} \cdot H \cdot x = \{x^{-1}hx \in G \mid h \in H\}$
4. $\forall x \in G: x^{-1}Hx = H$
5. $\forall x \in G: xH = Hx$.

<u>Απόδειξη</u>: (1) $\Rightarrow$ (2): Η πράξη $xH \cdot yH = (x \cdot y)H$ είναι καλά ορισμένη $\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} xH = zH \\ yH = wH \end{matrix}\right\} \Rightarrow (xy)H = (zw)H \Big] \Leftrightarrow$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow \left[\left\{ \begin{array}{l} z \in xH \\ w \in yH \end{array} \right\} \Rightarrow zw \in (xy)H \right]$.

Έστω τώρα τυχόν $x \in G$, $h \in H$. Τότε: $eH = hH$ (αφού $e \sim_H h \Leftrightarrow e^{-1} \cdot h \in H \Leftrightarrow h \in H$: ισχύει) $xH = xH$ $\Rightarrow$

$\xrightarrow{(1)} (ex)H = (hx)H \Rightarrow xH = (hx)H \Rightarrow x \sim_H hx \Rightarrow x^{-1} \cdot h \cdot x \in H$

(2) $\Rightarrow$ (3) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του συνόλου $x^{-1}Hx$

(3) $\Rightarrow$ (4) Αρκεί νδο $\forall x \in G: H \subseteq xHx^{-1}$. Έστω $h \in H$ και έστω τυχόν $x \in G$. Τότε από το (3): $x^{-1}hx \in H, \forall x \in G$.
Άρα για $x = x^{-1} \Rightarrow (x^{-1})^{-1} h x^{-1} = xhx^{-1} \in H \Rightarrow$
$\Rightarrow xhx^{-1} = h' \in H \Rightarrow h = x^{-1}h'x \in x^{-1}Hx$.
Άρα $\boxed{H \subseteq xHx^{-1}}$

(4) $\Rightarrow$ (5) Έστω τυχόν $x \in G$. Τότε: $\forall h \in H: x^{-1}hx = h' \in H \Rightarrow$
$\Rightarrow hx = xh'$, όπου $h' \in H$.
Όμοια $\forall h \in H: xh = h''x$, όπου $h'' \in H$
Άρα αν $a \in xH \Rightarrow a = xh$, $h \in H$ και άρα $a = h''x, h'' \in H$
$\Rightarrow a \in Hx \Rightarrow \boxed{xH \subseteq Hx}$
Όμοια $a \in Hx \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{Hx \subseteq xH}$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{Hx = xH}$

(5) $\Rightarrow$ (1). Έστω $x, y, z, w \in G$, έτσι ώστε: $z \in xH$ και $w \in yH$. Τότε: $z = x \cdot h_1$, $h_1 \in H$, $w = y h_2$, $h_2 \in H$ $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow zw = xh_1 \cdot y \cdot h_2$
~~...~~ $h_1 \cdot y \in Hy \overset{(5)}{=} yH \Rightarrow \exists h_3 \in H: h_1 \cdot y = yh_3$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow zw = xy\underbrace{h_3 \cdot h_2}_{\in H} \in (xy)H \Rightarrow$ η πράξη είναι καλά ορισμένη.

Πρόταση: Αν G: ομάδα και $H \leq G$ τότε $\forall x, y \in G$:

(6) $xH = Hx \iff \sim_H \equiv {}_H\sim \iff \forall x, y \in G : x \sim_H y \iff x \,{}_H\sim\, y$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω ότι $\forall x, y \in G : xH = Hx$. Έστω $x \sim_H y$

Τότε $[x]_H = [y]_H \iff xH = yH \iff Hx = Hy \iff$

$\iff {}_H[x] = {}_H[y] \iff x \,{}_H\sim\, y$

($\Leftarrow$) (Άσκηση)

Ορισμός: Μια υποομάδα $H \leq G$ καλείται κανονική $\iff$

$\iff$ η H ικανοποιεί μία από τις 6 συνθήκες και θα γράφουμε $H \trianglelefteq G$.

– Αν $H \trianglelefteq G$, τότε $\sim_H \equiv {}_H\sim$

$[x]_H = {}_H[x]$, $\forall x \in G$

$xH = Hx$, $\forall x \in G$

$G / \sim_H = G / {}_H\sim \; := G/H$.

– Αν $G = S_3$ και $H = \langle \mu_1 \rangle$, είδαμε ότι $\mu_2 H \neq H \mu_2$. Άρα αν πάρω $S_3 / \sim_H$, η 'πράξη' $xH \cdot yH = (xy)H$ <u>ΔΕΝ</u> είναι καλά ορισμένη. Να βρεθούν $x, y, z, w \in S_3$ τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{array}{l} xH = zH \\ yH = wH \end{array}\right\} \Rightarrow (xy)H \neq (zw)H.$$